Programme annuel de mathématiques : Terminale

Voici la progression que je vous propose de suivre cette année.

— **Récurrence. Convergence de suites. Limites de fonctions**.

Imaginons que l'on souhaite démontrer que l'égalité suivante est vraie pour toutes les valeurs entières de n

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Comment faire ? On peut, bien entendu, commencer par se convaincre de la véracité de cette égalité pour les premières valeurs de n mais comment faire pour toutes les valeurs ? C'est pour répondre à ce genre de questions que nous découvrirons un outil indispensable : le raisonnement par récurrence.
Il semble que Pascal, pour la récurrence, et Fermat, pour la descente infinie, soient les premiers à avoir énoncé nettement ces principes et à en avoir reconnu la puissance et la généralité.
Cependant, ce n'est que dans la seconde moitié du 18^{ime} siècle que, grâce à Euler, récurrence et descente deviendront des outils de raisonnements peu à peu reconnus. Enfin c'est au long du 19^{ime} que la communauté mathématique viendra à les considérer comme la base même de l'édifice des nombres. Les notions de limites et de continuité qui paraissent tant naturelles ont nécessité le travail de plusieurs générations de mathématiciens avant de pouvoir être définies précisément.
Les définitions de limite de suites et de continuité de fonction firent leur apparition dans un article de Bernhard Bolzano (1781-1848) en 1817. Il les introduisit comme outils dans le seul but de démontrer un théorème celui des " valeurs intermédiaires" (le T.V.I pour les initiés).
Plus tard Augustin Louis Cauchy (1789-1857) donnera une formalisation de la notion de limite (1821) et c'est K. Weierstrass (1815-1897) qui en donnera une définition précise. C'est d'ailleurs celle que nous utilisons aujourd'hui.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Démonstration par récurrence.
2. Critères de convergence comme par exemple : une suite de réels monotone et bornée est convergente.
3. Caractérisation de la notion de limite à l'aide des quantificateurs. Unicité de la limite d'une suite convergente.
4. Opérations entre les limites. Notions d'asymptotes (verticales, horizontales, obliques).
5. Caractérisation de la notion de continuité en un point d'une fonction grâce à celle des limites.

— **Combinatoire. Loi binomiale.**

La combinatoire est en fait présente dans toute l'antiquité en Inde et en Chine. En particulier, la combinatoire s'intéresse aux méthodes permettant de compter les éléments dans des ensembles finis. Le dénombrement correspond au calcul du nombre de résultats de l'univers des résultats possibles lors d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes.
La combinatoire permet de répondre entre autres à des questions comme :

— les rangements de livres sur une étagère
— les dispositions de personnes autour d'une table
— les tirages avec remise d'un certain nombre de boules numérotées dans une urne

Nous verrons que nous aurons besoin de la combinatoire pour aborder une autre notion importante en probabilité celle de la loi binomiale.
Nous utiliserons la notion de variable aléatoire vue en classe de Première pour calculer la fréquence du nombre de succès obtenus lors de la répétition de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes. La loi binomiale fait partie des plus anciennes lois de probabilités étudiées. Elle fut introduite par Jacques Bernoulli qui y fait référence en 1713 dans son ouvrage "Ars Conjectandi".

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Les notions de p-liste, de combinaison, de permutation, d'arrangement. Nous verrons par exemple que pour la combinaison : disposition non ordonnée de k éléments d'un ensemble de n éléments, nous avons la formule suivante :
$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
où $n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$ se lit "factorielle n". Par exemple $5! = 5.4.3.2.1 = 120$.
2. Loi binomiale et applications à la prise de décision lors de test d'hypothèse.

— **Dérivée seconde. Convexité.**

Arrivés à ce moment-là de notre parcours, nous pouvons dire que nous avons des outils puissants pour étudier les fonctions comme par exemple la dérivée. Nous savons que le signe de la fonction dérivée nous donne des informations sur les variations d'une fonction. Mais est-ce bien suffisant ? Si l'on sait que sur un intervalle donné $[a, b]$ une fonction est croissante, la façon de dessiner sa courbe représentative peut se faire de bien des façons (il y a différentes "courbures"). Comment choisir alors la bonne ? Nous verrons que la dérivée seconde est le bon "outils" pour répondre à cette question. Ceci nous donnera, alors, l'occasion d'introduire la notion de convexité et le lien entre la convexité d'une fonction sur un intervalle et le signe de la dérivée seconde de cette fonction sur cet intervalle.

Nous verrons donc (entre autres) :

1. La définition de la dérivée seconde notée f''.
2. Nous verrons le théorème suivant :
si $f''(x) \geq 0$ pour tout x dans $[a, b]$ alors f est convexe sur cet intervalle. Nous verrons aussi son pendant en terme de fonction concave.
3. Nous aurons alors l'occasion de reparler d'extrema. En effet, si $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$ alors f admet un maximum local en x.
4. Nous savons que si la dérivée première s'annule en x cela correspond graphiquement à l'existence d'une tangente horizontale mais que signifie géométriquement que $f''(x) = 0$? Nous répondrons à cette question.

— **Fonctions trigonométriques.**

Nous reprendrons, dans ce court chapitre, les notions vues en classe de Première et les compléterons par quelques formules dites de "linéarisation", de "duplication" qui nous permettront de résoudre des équations trigonométriques et seront d'agréables outils pour le calcul intégral.

— **Géométrie dans l'espace.**

Il s'agira ici de reprendre les outils de géométrie dans le plan, comme par exemple le produit scalaire ou le vecteur normal, vus en Première et de les placer dans un cadre plus général qui est l'espace (ensemble à trois dimensions). Nous verrons que certaines notions passent facilement à des ensembles de dimensions supérieures mais que d'autres nécessitent certains ajustements.

Nous verrons donc (entre autres) :

1. Produit scalaire dans l'espace. Vecteurs directeurs pour un plan. Vecteur normal d'un plan.
2. Nous verrons "enfin" la différence qu'il existe entre deux droites "perpendiculaires" et deux droites "orthogonales".
3. Équation cartésienne d'une droite dans l'espace, celle d'un plan.
4. Équations paramétriques pour des droites et des plans.
5. Positions relatives de droites et de plans dans l'espace.

— **Fonction logarithme népérien.**

C'est en 1617 que le mathématicien Écossais John Napier (Neper) (1550 − 1617) découvrit les logarithmes et leur intérêt pour transformer multiplications en additions et divisions en soustractions.
Kepler les utilisa pour associer la progression géométrique des puissances d'un nombre à celle de la progression arithmétique des exposants. Bien que cette relation était connue depuis Archimède, on ne l'avait pas encore utilisée pour simplifier des calculs. Kepler énonça ses fameuses lois en faisant un usage intensif des logarithmes.
La fonction " logarithme népérien" fut définie avant celle de la fonction exponentielle.
C'est Euler qui, plus tard, définira le logarithme népérien comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
Nous utiliserons donc toutes les techniques vues dans les chapitres précédents pour étudier cette fonction et découvrir ses propriétés aussi bien algébriques $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$, $\ln(a)^b = b \ln a$,... qu'analytiques $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et bien d'autres.

— **Primitives et équations différentielles.**

À ce niveau de l'année, les dérivées n'ont plus de secret pour nous. Nous savons, pour une fonction f donnée, obtenir l'expression de $f'(x)$. Serions-nous capables de "remonter le courant" ? Supposons que l'on ait une fonction $g : x \mapsto x^2$ de quelle fonction est-elle la dérivée ? Autrement dit, existe-t'il une fonction dérivable G telle que $G'(x) = g(x)$? Si oui, comment l'obtenir explicitement ?
Cette question est loin d'être évidente et l'obtention, en cas d'existence, de cette "fameuse" fonction appelée *primitive* n'est pas toujours chose aisée.

Répondre à ces questions nous permettra d'aborder une notion clé en mathématiques qui est celle des équations différentielles de la forme par exemple $y' = ay$ où l'inconnue y est une fonction et y' sa dérivée première.
Les équations différentielles modélisent entre autre la notion de mouvement, accélération, vitesse et sont des outils primordiaux pour les physiciens, chimistes... nous verrons comment obtenir les solutions à ces équations.

— **Calcul intégral.**

L'origine du calcul intégral est le calcul des aires de surfaces. Archimède savait déjà déterminer, au II ième siècle avant J.-C., l'aire sous un segment de parabole. Jusqu'à la fin du XVII ième siècle, le calcul intégral relèvera de la théorie de la mesure des grandeurs (longueur, aire, volume...). Un pas sera franchi quand Leibniz établira un lien entre le calcul intégral et le calcul différentiel qui constituent le calcul infinitésimal. Newton arriva au même résultat de façon indépendante mais c'est Leibniz qui publia le premier ces résultats.

Le symbole "$\int$" a été introduit par Leibniz. Ce calcul intégral était au début appelé "calcul sommatoire". C'est dans la résolution, par Jakob Bernoulli en 1690, d'un problème posé par Leibniz en 1686, que l'on rencontre pour la première fois le terme "intégral" et Leibniz lui donnera le nom de "calcul intégral".
Nous verrons alors le lien étroit qu'il y a entre le calcul intégral et la notion de primitive. Ce lien apparaît dans la formule de Barrow dite aussi de Newton-Leibniz :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.
Nous apprendrons à calculer des intégrales pour déterminer des aires de régions dans le plan mais nous verrons qu'elles servent aussi à étudier des fonctions (signes, variations, limites...).

— **Sommes de variables aléatoires. Loi des grands nombres et inégalité de Bienaymé-Tchebytchev**

La notion de variable aléatoire fut introduite en classe de Première. Elle est associée à une expérience aléatoire.
Il peut arriver que l'on ait à définir deux variables aléatoires pour la même expérience. Que peut-on faire avec ces deux fonctions ? Peut-on les ajouter, les multiplier ? Et si oui, que représentent ces opérations en termes d'événements aléatoires ? Dans ce chapitre nous étudierons seulement la somme de variables aléatoires et ses implications en probabilité.
Nous terminerons l'année avec une "jolie" inégalité dite de Bienaymé-Tchebychev.
Il s'agit d'une inégalité de concentration permettant de montrer qu'une variable aléatoire prend avec une faible probabilité une valeur relativement lointaine de son espérance.
Ce théorème doit son nom aux mathématiciens Irénée-Jules Bienaymé, qui fut le premier à la formuler, et Pafnouti Tchebychev qui la démontra.

Eric Dubon

"L'essence des mathématiques, c'est la liberté". [Georg Cantor (1845-1918)].