Programme annuel de mathématiques : Seconde

Voici la progression que je vous propose de suivre cette année. En espérant que ces premiers arbres que vous allez découvrir vous donnent envie d'entrer dans la forêt.

— **Arithmétique.**

Un bref chapitre dont on pourrait bien se demander ce qu'il fait là tant il y a de choses à dire. Il faudra pour les plus patients attendre la classe de Terminale et son option "Mathématiques expertes" (expression galvaudée) pour y découvrir un joli chapitre d'Arithmétique ambitieux et passionnant.
Nous travaillerons donc uniquement avec des nombres entiers et nous aborderons la notion de division euclidienne $a = bq + r$ avec $r < b$, de multiple, de diviseur (on dit que b divise a s'il existe un entier k tel que $a = kb$), de nombre premier.
Ce sera un chapitre introductif car nous démontrerons certains résultats sur la parité de nombres entiers dont nous aurons besoin pour le chapitre suivant et en particulier la démonstration du fait que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Je terminerai en citant un "très grand mathématicien" surnommé le *Prince des mathématiciens* C.F.Gauss (1777-1855) : "La Mathématique est la reine des sciences et l'Arithmétique est la reine des mathématiques ".

— **Théorie des ensembles, nombres réels, valeur absolue et intervalles**.

Nous naviguerons entre la Grèce antique et le 19$^{\text{ième}}$ siècle. Il s'agira ici de reprendre des notions vues au collège et de les situer dans un contexte plus rigoureux qu'est la théorie des ensembles. Ces fameux nombres manipulés depuis tant d'années suivent des règles bien précises et vivent dans des familles qui bien que distinctes ont souvent des propriétés communes. On découvrira et démontrera qu'il existe des nombres qui ne peuvent jamais s'écrire comme quotients de deux entiers (cela bouleversa les Pythagoriciens). Que faire avec eux ? Dans quel ensemble vivent-ils ? On verra, aussi, que les fameux "nombres relatifs" du Collège s'appellent en fait "nombres réels" et que la notion d'intervalles et de distance (la valeur absolue) jouent un rôle clef dans leur compréhension.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
2. Nous démontrerons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
3. Nous étudierons aussi les intervalles de la forme $[a;b]$, $]a,b[$, ... et leur relation avec la valeur absolue. Nous verrons que l'on peut faire des "opérations" entre les ensembles et a fortiori entre intervalles.

— **Probabilités**

Dans ce chapitre, nous reprendrons les notions vues en classe de Troisième et nous les situerons dans leur contexte historique tout en introduisant le vocabulaire adapté à cette branche des mathématiques. Longtemps considérées comme "jeux mathématiques", les probabilités sont peu à peu devenues un membre à part entière des mathématiques grâce, entre autres, à Fermat, Pascal, de Moivre, Bernoulli,...

Une grande partie des notions que nous verrons sont donc du 17$^{\text{ième}}$ siècle, nous ferons un bref passage dans le 19$^{\text{ième}}$ en abordant la notion d'équiprobabilité et la règle que Laplace énonça dans son traité *Essai Philosophique sur les Probabilités* de 1814.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. La notion d'Univers noté Ω comme étant l'ensemble de toutes les issues possibles d'une même expérience aléatoire.
2. Nous définirons ce que sont les événements d'un Univers et verrons les notions de réunions et d'intersections notées respectivement $A \cup B$ et $A \cap B$ avec $A, B \subset \Omega$.
3. Nous généraliserons la formule de Troisième au cas où les événements ne sont pas *incompatibles* et aborderons donc l'égalité suivante : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

— **Fonctions : généralités**

Maintenant que nous avons le contexte adequat grâce à la théorie des ensembles vue dans le premier chapitre, il est grand temps d'aborder une notion importante de l'analyse mathématique : les fonctions. Dans ce chapitre, nous introduirons la notion de fonction puis nous parlerons des variations de celle-ci, la notion d'intervalle sera, alors, plus qu'indispensable. Puis nous verrons ce qui fait la force de cette notion, sa dualité à travers sa représentation graphique et le fait que nous ayons donc un pendant géométrique. Nous verrons ce qu'est le signe d'une fonction et comment l'étudier aussi bien géométriquement qu'algébriquement et la relation qu'il y a avec la résolution d'équations et inéquations. Nous reprendrons la notion de fonction affine vue en Troisième et la replacerons dans ce contexte.
Même si l'on retrouve cette idée de fonctions dans la Grèce Antique, Galilée et Kepler seront les premiers, dans le cadre de l'astronomie, à y associer des formules. Puis Leibniz au 17$^{\text{ième}}$ siècle, Jean Bernoulli au 18$^{\text{ième}}$ siècle, le "grand" Euler puis Lagrange et Cauchy à la fin du 18$^{\text{ième}}$ et au début du 19$^{\text{ième}}$ feront évoluer cette notion jusqu'à ce que nous connaissons aujourd'hui. La notion de fonction est primordiale, nous la rencontrons dans toutes les branches des mathématiques mais aussi en économie, en informatique, en sciences physiques, en biologie,...

— **Vecteurs : généralités et coordonnées.**

Dans ce chapitre, nous aborderons un thème nouveau qui est celui des vecteurs. À la croisée de l'algèbre et de la géométrie et avec de très nombreuses applications en physique ils sont indispensables en mathématiques. Nous les étudierons d'abord à travers leurs propriétés géométriques : translations, règle du parallélogramme, relation de Chasles puis nous suivrons les pas de René Descartes en les munissant, grâce à un repère, de coordonnées ce qui nous permettra d'y mettre une arithmétique et de répondre à des problèmes de géométrie par le calcul (somme de vecteurs, produit par un réel, principe de colinéarité,...).
La première formalisation des vecteurs est le fruit d'un travail de plusieurs mathématiciens durant la première moitié du 19$^{\text{ième}}$ siècle. Le mathématicien allemand Bernard Bolzano (1781-1848), publie un livre élémentaire contenant une construction axiomatique de la géométrie. Les mathématiciens français Jean-Victor Poncelet(1788-1867) et Michel Chasles (1773-1880) en affineront les travaux.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Si A et B sont deux points du plan, que signifie parler du vecteur $\vec{AB}$? Nous verrons son lien avec la translation.
2. L'équivalence suivante (que nous démontrerons) :
$$\vec{AB} = \vec{CD} \Longleftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$
3. Opérations entre vecteurs et en particulier la "fameuse" règle de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
4. La *colinéarité* entre vecteurs et ses applications géométriques.

— **Géométrie plane.**

Ce chapitre sera l'occasion de revoir les différents résultats de géométrie appris au Collège. Nous en profiterons pour en introduire des nouveaux qui ont, malheureusement, disparu du paysage ou qui n'ont jamais été énoncés souvent par manque de temps. Nous verrons donc le théorème de Pythagore, celui de Thalès (qui n'est pas dû à lui d'ailleurs), les angles inscrits-angles au centre, le théorème du triangle inscrit dans un cercle (celui-ci est bien de Thalès), les intersections des droites remarquables des triangles, la projection orthogonale, la formule fondamentale de la trigonométrie et bien d'autres.

— **Études de fonctions usuelles. Résolutions d'équations et inéquations (Partie 1).**

Maintenant que la notion de fonction n'a plus de secret pour nous, il est temps d'en connaître certaines dîtes "usuelles" et qui nous serviront plus tard comme base pour comprendre des fonctions bien plus compliquées. À travers les variations et les signes de fonctions comme : la fonction carrée, la fonction inverse, la fonction cube et même la fonction valeur absolue, nous verrons comment résoudre des équations et des inéquations. Nous verrons les liens qu'il y a entre analyse mathématique et géométrie et comment créer un dictionnaire nous permettant de passer d'un monde à l'autre.

Ainsi :

1. Nous étudierons donc les fonctions suivantes : $x \mapsto x^2,\ x \mapsto \sqrt{x},\ x \mapsto \dfrac{1}{x},\ x \mapsto |x|, \ldots$
2. Nous verrons l'étude de fonctions obtenues comme somme, produit de telles fonctions usuelles.
3. Nous associerons alors la résolution d'équations ou d'inéquations à l'étude d'intersection avec les axes du repère comme par exemple $f(x) = 0$ ou du signe de fonctions avec $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$,...

— **Géométrie analytique.**

Maintenant que nous avons les différents théorèmes de la géométrie plane et que nous avons aussi les coordonnées des vecteurs nous pouvons entreprendre notre voyage vers la géométrie analytique. Nous ne quitterons pas le $17^{\text{ième}}$ siècle car on attribue les premiers développements de la géométrie analytique moderne à René Descartes (1596-1650) et à Pierre de Fermat (1601-1665). Ces deux savants ont voulu établir des ponts entre l'algèbre et la géométrie. Le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703) développa les idées de Descartes et Fermat en remplaçant les

concepts géométriques par des concepts algébriques. Les objets géométriques ne sont plus définis uniquement par leurs propriétés mais par des coordonnées dans un repère orthonormé et des équations.
C'est ainsi que nous introduirons la notion de vecteur directeur à une droite et nous verrons comment, alors, définir l'équation cartésienne de celle-ci. Ce sera un prétexte pour revoir de jolis résultats de géométrie mais que nous aborderons cette fois-ci non pas avec des arguments de géométrie affine mais avec une géométrie vectorielle et des calculs entre coordonnées de vecteurs directeurs.
Ces concepts que nous étudierons uniquement en deux dimensions, c'est à dire dans le plan, nous permettrons de préparer le terrain afin de travailler en trois dimensions, c'est à dire dans l'espace, en Terminale.
Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Notion de vecteur directeur d'une droite.
2. L'équation cartésienne d'une droite : $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur directeur un vecteur de coordonnées $(-b, a)$ et inversement. Nous le démontrerons.
3. Relation entre équation réduite $y = mx + p$ et équation cartésienne et les coordonnées de leurs vecteurs directeurs respectifs.
4. Caractérisation du parallélisme et de l'orthogonalité grâce aux coordonnées des vecteurs directeurs.

— **Fonctions rationnelles. Résolutions d'équations et inéquations (Partie 2).**

Maintenant que nous connaissons bien les fonctions usuelles comme, par exemple, les polynômes, nous pouvons à partir de celles-ci construire d'autres fonctions. Nous considèrerons, dans ce chapitre, le quotient de deux polynômes appelé fonction rationnelle. Quand les deux polynômes sont des fonctions affines alors la fonction rationnelle est appelée fonction homographique. Nous verrons, alors, comment résoudre des équations et inéquations faisant intervenir des quotients puis nous appliquerons ces résultats à l'étude des positions relatives des représentations graphiques de fonctions.

Nous étudierons donc des fonctions de la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ mais nous verrons, aussi, comment résoudre des équations comme par exemple $\dfrac{-x+3}{4x+2} = -x + 6$ ou des inéquations comme $\dfrac{2x-7}{-5x+1} \geq \dfrac{3x+1}{x-1}$.

— **Statistiques mathématiques.**

Ce chapitre reprendra les notions de moyenne, médiane vues en Troisième. On introduira en particulier les quartiles et on verra comment obtenir une valeur approchée de la médiane à l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants.
Nous aborderons le lien étroit qu'il y a entre statistiques et probabilités. En nous appuyant sur la notion d'échantillon aléatoire, nous verrons comment "tester" une hypothèse portant sur la valeur d'une proportion donnée à l'aide de fréquences observées.
Le concept de statistiques mathématiques serait né des premiers travaux concernant les probabilités développés par Fermat et Pascal. Thomas Bayes fut un des premiers à introduire la notion de statistique. Mais c'est à Adolphe Quetelet que l'on doit l'idée que la statistique est une science

s'appuyant sur les probabilités.

Imaginons que nous ayons un échantillon de taille n d'une certaine population. Supposons que nous désirions étudier un certain *caractère* de cette population et qu'une étude au préalable nous ait donné une proportion "p" (tout ressemblance avec la notion de probabilité n'est pas fortuite) d'apparition de ce caractère dans la population. Serions-nous capable à l'aide de notre échantillon de savoir si nous pouvons accepter l'information donnée sur la proportion ? Ou au contraire, l'échantillon considéré représente-t'il bien la situation étudiée ? Que dire de l'intervalle $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$? Voici ce qui nous tiendra en haleine dans tout ce chapitre.

Eric Dubon