Programme annuel de mathématiques : Première

Voici la progression que je vous propose de suivre cette année.

— **Généralités sur les polynômes. Polynôme du second degré**.

Dans ce chapitre, nous entrerons dans le monde de l'*algèbre générale* grâce aux polynômes. Ils furent pensés, initialement, pour résoudre des équations mais prirent petit à petit une certaine liberté jusqu'à devenir un sujet d'étude à part entière. Nous travaillerons avec des polynômes à coefficients réels ce qui nous permettra de revoir les propriétés de ces nombres vues en Seconde.
On dit que $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ où $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et $a_n \neq 0$ est un polynôme de degré n à coefficient réels (si vous voyez, dans la notation, une certaine analogie avec les fonctions c'est normal...on verra pourquoi).
Si P est un polynôme de degré n et si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $P(\alpha) = 0$ alors α est appelé *racine* de P et il existe un autre polynôme disons Q de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
Nous nous intéresserons à ce genre de factorisations et donc à la possibilité de prouver l'existence de α et si possible d'en donner sa valeur.
Puis dans un second temps nous nous pencherons sur un cas particulier de polynômes, ceux de degré deux de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

Si nous cherchons la ou les valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$ (intersection de la courbe représentative de la *fonction polynomiale* P avec l'axe des abscisses) alors nous sommes en train de résoudre une équation du second degré. Le premier témoignage connu de résolution d'une telle équation se trouve sur une tablette babylonienne datant environ de 2000 ans avant J.-C. Les Grecs passeront par là et chercheront à résoudre de façon générale ce genre d'équations via des moyens géométriques. Puis les mathématiciens indiens prirent le relais grâce en particulier à Brahmagupta (598-670). Dans deux de ses traités mathématiques, il introduit le zéro (que le monde occidental ne connaissait pas) et les entiers négatifs. Ce sont les mathématiciens arabes qui donnèrent le "coup de grâce" à cette longue épopée. Nous devons une grande partie des thèmes que nous aborderons dans ce chapitre à Al-Khwarizmi (environ 780-850) (nous lui devons aussi le mot "algorithme" qui provient directement de son nom et le mot "algèbre" qui vient de "al-jabr" qui signifie "restauration" et qui fut employé dans le titre d'un de ses livres).
Nous découvrions, entre autres, le réel appelé *discriminant* $\Delta = b^2 - 4ac$ et l'importance de son signe quant à la résolution de telles équations.

— **Généralités sur les suites. Suites géométriques et arithmétiques.**

Nous introduirons le concept de *suite* comme étant des fonctions discrètes, c'est à dire dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$. En nous reposant sur le travail fait en classe de Seconde, nous pourrons, alors, étudier ces fonctions si particulières.
Voici les mathématiciens qui apportèrent leur contribution à la compréhension des suites : Léonard de Pise dit " Fibonacci" (1170-1250), Pascal (1623-1662), Cantor (1845-1918), Méray (1825-1911).
G. Cantor utilisa les suites afin de donner une construction rigoureuse des nombres réels. Ce travail avait déjà été commencé par Méray. Les nombres réels (et oui encore eux) peuvent être vus comme limite d'une suite de nombres rationnels (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ mais ça c'est une autre histoire. Il faudra être patient.).

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Expression explicite $u_n = f(n)$, expression avec relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Étude de suites de la forme $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_{n+1} = q.u_n$ où r et q sont des réels.
3. Nous étudierons aussi des sommes de termes de suites de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

— **Produit scalaire et applications géométriques.**

Nous allons découvrir, dans ce chapitre, une autre opération sur les vecteurs. Une opération qui partage les propriétés d'un produit à ceci près que ce n'est pas une opération *interne*, c'est à dire que nous allons "multiplier" deux vecteurs et obtenir...un réel (appelé *scalaire*) !
De la même façon que les vecteurs peuvent être abordés algébriquement ou géométriquement, nous verrons que l'on peut définir le produit scalaire entre deux vecteurs de bien des façons.
Nous allons voyager entre la fin du 19^{ime} et le début du 20^{ime} siècle. En effet, c'est le mathématicien irlandais Hamilton (1805-1865) qui après avoir découvert le *corps des quaternions* va introduire les prémices du produit scalaire. Son travail sera repris et simplifié par le mathématicien américain Gibbs (1839-1903), le mathématicien italien Peano (1858-1932) associera le produit scalaire à la notion d'aire et de *déterminant*. Il semblerait que l'on doive le nom de "produit scalaire" à Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti mais il apparaitrait aussi dans les écrits de Clifford.

Nous verrons donc (entre autres) :

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan alors le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :
   $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u}, \vec{v})$.
2. On verra aussi que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') alors :
   $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.
3. Nous aborderons certaines caractérisations géométriques comme par exemple :
   si (d) et (d') sont deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
4. Nous reprendrons aussi la notion d'équation cartésienne d'une droite mais à travers le prisme du produit scalaire.

— **Convergence de suites. Limites de fonctions et continuité.**

Les notions de limites et de continuité qui paraissent tant naturelles ont nécessité le travail de plusieurs générations de mathématiciens avant de pouvoir être définies précisément.
Les définitions de limite de suites et de continuité de fonction firent leur apparition dans un article de Bernhard Bolzano (1781-1848) en 1817. Il les introduisit comme outils dans le seul but de démontrer un théorème celui des " valeurs intermédiaires" (le T.V.I pour les initiés).
Plus tard Augustin Louis Cauchy (1789-1857) donnera une formalisation de la notion de limite (1821) et c'est K. Weierstrass (1815-1897) qui en donnera une définition précise. C'est d'ailleurs celle que nous utilisons aujourd'hui.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Critères de convergence comme par exemple : une suite de réels monotone et bornée est convergente.
2. Caractérisation de la notion de limite à l'aide des quantificateurs. Unicité de la limite d'une suite convergente.

3. Opérations entre les limites. Notions d'asymptotes (verticales, horizontales, obliques).
4. Caractérisation de la notion de continuité en un point d'une fonction grâce à celle des limites.

— **Dérivation locale. Meilleure approximation affine.**

Le célèbre mathématicien grec Archimède de Syracuse (-287 ; -212) est le premier à s'intéresser à la notion de tangente. Il énonce des propriétés concernant notamment les tangentes à la spirale qui porte son nom. Des siècles plus tard, le mathématicien italien Torricelli (1608-1646) et le français Roberval (1602-1675) prolongent la méthode d'Archimède et apportent les premières pierres à un édifice majeur des mathématiques, le calcul infinitésimal. C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du 17e siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe.
Le mathématicien français Pierre de Fermat (vers 1610-1665), surnommé "prince des amateurs", décrit ensuite la tangente comme position limite d'une sécante à une courbe. C'est la définition qu'on utilise aujourd'hui.Les méthodes analytiques de Descartes et de Fermat eurent beaucoup de succès en Angleterre et furent donc reprises par John Wallis (1616-1707) et James Gregory (1638-1675). Le mathématicien Isaac Barrow (1630-1677) (le prédécesseur d'Isaac Newton (1643-1727) à la chaire de mathématique de l'université de Cambridge) développera alors une méthode des tangentes par le calcul, très proche de celle que nous utilisons actuellement.
La notion de nombre dérivé a vu le jour au 17^{ime} siècle dans les écrits de Leibniz et ceux de Newton, qui le nomme fluxion et qui le définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ». Le marquis de l'Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du 17e siècle grâce à son livre sur l'analyse des infiniment petits.
C'est à Lagrange (fin du 18^{ime} siècle) que l'on doit la notation f '(x), aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Définition du nombre dérivé en tant que limite :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2. Notion de meilleure approximation affine en lien avec l'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction continue en x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

— **Probabilités conditionnelles et totales.**

Vers 1654, le Chevalier de Méré (Antoine Gombaud) (1607 – 1684) proposa plusieurs problèmes sur des jeux de dés au mathématicien Blaise Pascal (1623 – 1662) qui en résolu plusieurs et soumit ses raisonnements à Pierre de Fermat (1601 – 1665).
De voyage à Paris, le physicien et mathématicien hollandais, Christiaan Huygens (1629 – 1695) prend connaissance de la nombreuse correspondance entre les deux mathématiciens et publie "la théorie du jeu de dés".
C'est à partir de ce moment que les probabilités vont quitter le monde des jeux mathématiques pour devenir une branche des mathématiques.
Bien d'autres mathématiciens célèbres contribueront à l'évolution des probabilités comme par exemple Abraham de Moivre (1667 – 1754) pour la combinatoire, Jacques Bernoulli (1654 – 1705)

pour la loi des grands nombres, Gottfried Leibniz (1646 – 1716), Thomas Bayes (1702 – 1761) pour les probabilités des causes, Simon de Laplace (1749 – 1827) pour la théorie analytique des probabilités. C'est en 1933 que le mathématicien russe Andrei Kolmogorov (1903 – 1987) axiomatisera les probabilités en se basant sur la théorie de la mesure et de l'intégration.
C'est à Thomas Bayes que l'on doit la formule des probabilités conditionnelles publiée en 1763.

Nous allons donc nous baser sur le cours de probabilité de la classe de Seconde et nous interroger sur la possibilité de calculer la probabilité qu'un événement se réalise en sachant qu'un autre événement s'est réalisé. Ceci nous fera aborder la notion d'indépendance entre deux événements aléatoires.
Ainsi :

1. Si A et B sont deux événements d'un même Univers Ω alors :
$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
2. Nous verrons comment la construction d'un arbre probabiliste permet de bien modéliser ce genre de situations.
3. Nous verrons aussi que si A et B sont deux événements indépendants alors
$$P(A \cap B) = P(A).P(B).$$

— **Dérivation globale et applications à l'étude des fonctions.**
Ce chapitre vient compléter celui de la dérivation en un point.
Maintenant que nous savons que le nombre dérivé d'une fonction en un point correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de cette fonction en ce point et que, localement, nous pouvons avoir des informations sur les variations de la fonction, il est temps de passer à une notion plus globale comme sur un intervalle par exemple.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Notion de fonction dérivée sur un intervalle.
2. Lien entre dérivée et continuité.
3. Différentes formules pour calculer les dérivées de fonctions.
4. Application de la dérivée à l'étude des variations des fonctions.

— **Fonction exponentielle.**

La notation "e" est due à Euler, elle apparait pour la première fois dans une lettre adressée à Goldbach (1731). Le nombre "e", comme π, est irrationnel (il ne peut s'écrire comme quotient de deux entiers et ce fut démontré par Lambert en 1761) et transcendant (il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers et ce fut démontré par Hermite en 1873).
La fonction exponentielle vérifie l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x).f(y)$ avec $f(0) = 1$.
C'est Jakob Bernoulli qui a travaillé sur les fonctions vérifiant cette équation fonctionnelle et il exposa les premières méthodes de résolution d'équations différentielles.

Nous travaillerons donc, entre autres, les notions suivantes :

1. Définitions de la fonction exponentielle : nous verrons différentes façons d'introduire cette fonction.
2. Nous étudierons les différentes propriétés de la fonction comme par exemple le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$ mais aussi pour $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$,...
3. Nous verrons en détail l'étude de cette fonction : signe, variations, tangentes, limites.

— **Probabilité : variables aléatoires.**

Voici un chapitre qui est la suite logique de tout le travail que nous avons fait en probabilité.
Nous verrons qu'il est souvent plus pratique d'associer une valeur numérique au résultat d'une expérience aléatoire, plutôt que de travailler directement avec une réalisation. La notion de variable aléatoire est donc née en même temps que le calcul des probabilités sans toutefois être repérée comme telle. C'est au cours du 18^{ime} siècle que furent découvertes la plupart des propriétés d'une variable aléatoire. On trouve déjà une approche de la notion d'espérance mathématique d'une variable aléatoire dans les écrits de Pascal sans toutefois la mentionner explicitement.
Nous verrons donc qu'une variable aléatoire n'est ni "variable" ni "aléatoire". Pourquoi cette étrange appellation alors...!?

— **Fonctions trigonométriques.**

Dès que nous parlons de trigonométrie nous viennent à l'esprit les mots "cosinus, sinus et tangente" appris au Collège. Ces "formules" qui permettent de relier angle et rapports de longueurs sont vues uniquement dans le cadre de triangles rectangles, autrement dit seulement avec des angles aigus. Mais peut-on aller plus loin ? Peut-on travailler avec d'autres valeurs d'angles ?
Nous généraliserons ces notions en introduisant les fonctions *cosinus*, *sinus*, *tangente* et les étudierons grâce à la notion de dérivée.
Cela sera le prétexte pour introduire une nouvelle mesure d'angle appelée *le radian*.
Les fonctions trigonométriques font partie de la famille des fonctions usuelles. Elles joueront un rôle clef dans le chapitre "nombres complexes" pour ceux qui choisiront l'option "maths expertes" en Terminale.

Eric Dubon